

重新推導高滲透率之井膚層效應條件

RE-DERIVATION OF THE HIGH-PERMEABILITY WELLBORE SKIN EFFECT CONDITIONS

中原大學
土木工程學系
助理教授

林穎凡*
Ying-Fan Lin

中原大學
土木工程學系
助理教授

林俊宏
Jun-Hong Lin

國立臺灣大學
生物環境系統工程學系
副教授

蔡瑞彬
Jui-Pin Tsai

國立臺灣大學
生物環境系統工程學系
教授

余化龍
Hwa-Lung Yu

摘要

在鑽井過程中，井周圍經常形成一個與周圍含水層水力特性不同的膚層區。在水井力學建模方面，膚層區可以表示為具有獨特滲透率的無限薄層，稱為膚層因子模型。經典模型是基於低滲透率（正膚層）開發的，假設井與含水層之間存在水頭不連續性。在過度完井導致的高滲透率（負膚層）中，這一假設可能不再適用，因為兩個高滲透率區域之間的水頭應是連續的。換句話說，過去發展的膚層因子條件在高滲透膚層區域中是不正確的。因此，本研究通過應用雙區模型，修訂了理論，以推導出正負膚層的膚層因子條件。雙區模型簡化為正膚層的經典條件，並為負膚層得出了新的條件，該條件要求井與含水層之間的水頭連續，但允許通量不連續。敏感性分析顯示，高滲透率膚層會顯著影響洩降，特別是在膚層區孔隙度突然增加時。本研究修正了過去的膚層因子模型，並提供了正確的推導方式，以改進水井力學模型分析。

關鍵詞：含水層抽水、地下水流動、井膚層、膚層因子、高滲透率膚層。

* 中原大學土木工程學系助理教授

320 桃園市中壢區中北路 200 號 · yflin1110@cycu.edu.tw

RE-DERIVATION OF THE HIGH-PERMEABILITY WELLBORE SKIN EFFECT CONDITIONS

Ying-Fan Lin*

The Department of
Civil Engineering,
Chung Yuan Christian
University

Jun-Hong Lin

The Department of
Civil Engineering,
Chung Yuan Christian
University

Jui-Pin Tsai

Department of
Bioenvironmental
Systems Engineering,
National Taiwan
University

Hwa-Lung Yu

Department of
Bioenvironmental
Systems Engineering,
National Taiwan
University

ABSTRACT

During the drilling process, a skin zone with hydraulic properties different from those of the surrounding aquifer often forms around the wellbore. In well hydraulics modeling, this skin zone can be represented as an infinitesimally thin layer with unique permeability, referred to as the skin-factor model. Classical models are developed based on low-permeability (positive skin) and assume a discontinuity in hydraulic head between the wellbore and the aquifer. In cases of high-permeability (negative skin) due to excessive well completion, this assumption may no longer hold, as the head between two high-permeability zones should be continuous. In other words, previously developed skin-factor conditions are incorrect for high-permeability skin zones. Therefore, this study revises the theory by applying a two-zone model to derive skin-factor conditions for both positive and negative skins. The two-zone model simplifies to the classical condition for positive skin and provides a new condition for negative skin, which requires continuous head between the wellbore and the aquifer but allows for discontinuous flux. Sensitivity analysis shows that high-permeability skin can significantly affect drawdown, especially when there is a sudden increase in porosity within the skin zone. We have corrected the previous skin-factor model and provided an accurate derivation method to improve well hydraulics model analysis.

Keywords: Aquifer pumping, Groundwater flow, Wellbore skin, Skin factor, High permeability skin.

Lin, Y.F.*, Lin, J.H., Tsai, J.P., & Yu, H.L. (2024). "Re-Derivation of The High-Permeability Wellbore Skin Effect Conditions." *Journal of Taiwan Agricultural Engineering*, 70(3), 29-36.

[https://doi.org/10.29974/JTAE.202409_70\(3\).0003](https://doi.org/10.29974/JTAE.202409_70(3).0003)

一、緒論

含水層抽水試驗經常用於表徵含水層的水力特性，例如水力傳導率和比儲量。抽水過程中，通過測量觀測井的洩降數據，可以使用解析解與最佳化方法或特徵曲線法來分析這些洩降資料，以推估水力參數。許多研究已經發展了侷限含水層抽水引起的洩降數學模型 (Theis, 1935; Hantush *et al.*, 1964; Papadopoulos and Cooper Jr, 1967; Yeh and Chang, 2013; Lin *et al.*, 2016)。這些模型對於理解地下水流動機制、評估水資源以及制定地下水管理策略至關重要。在含水層抽水試驗中，由於鑽井和/或開發活動，井周圍可能會形成井膚層 (Wellbore skin)。正膚層 (低滲透率膚層) 通常由於井鑽造成的損害和不完全的井開發而形成，是井眼周圍具有較低水力傳導率的區域 (Hawkins Jr, 1956; Hurst, 1953)。相反地，負膚層 (高滲透率膚層) 由於過度完井而形成，是一個比未擾動地層具有更高水力傳導率的區域 (Yeh *et al.*, 2008; Valois *et al.*, 2024)。

井膚層通常用來描述膚層區對洩降的影響。文獻中有多種考慮膚層效應的解析模式 (Agarwal *et al.*, 1970; Sandal *et al.*, 1978; Moench and Hsieh, 1985a; Novakowski, 1989)。主要有兩種方法將膚層效應納入洩降模型中：雙區模型和膚層因子模型。雙區模型假設膚層區和含水層形成區是獨立的，具有不同的物理特性和初始邊界條件，兩個區域通過連續條件相連 (Barker and Herbert, 1982; Yang and Gates, 1997; Yang and Yeh, 2005, 2007; Tsai and Yeh, 2012)。膚層因子模型則描述了一個單一流動模型，在井內設置一個內部邊界條件，稱為膚層因子條件。在膚層因子條件中，通過引入一個無因次參數 (稱為膚層因子)，反映膚層區引起的水頭損失。然而，傳統的膚層因子模型主要針對低滲透率 (正膚層) 情況開發，並假設井眼與含水層之間存在水頭不連續性。然而在高滲透率 (負膚層) 的情況下，這一假設可能不再適用，因為兩個高滲透率區域之間的水頭應是連續的 (Lin and Lin, 2024)。負膚層的形成可能會使水頭在井眼和含水層之間保持連續，但允許通量不連續，也就是說，傳統模型對於負膚層的數學條件假設違背了物理常識。

過去推導而得的膚層因子理論在高透水度的負膚層中是錯誤的，本研究重點在於重新推導新的負膚層因子條件，來符合高透水度膚層情況。本研究基於雙區模型重新推導了負膚層因子條件，以描述由

抽水井引起的洩降分佈。這一新的膚層因子條件在井眼和含水層之間僅依賴於通量的不連續性，提高了模型的真實性。為了展示新的膚層因子的效應，本研究將其結合在一個抽水引起之地下水流動模型中，以描述侷限含水層中的泵抽引起的洩降分佈，並利用該模型的解進行敏感性分析。結果表明新的負膚層因子主要在中後期時間段對系統產生影響，而現有的膚層因子主要在早期時間段影響系統。這是因為新的負膚層因子考慮了膚層區的水重新分佈效應，這對洩降具有持久影響。在膚層區具有高滲透率的情況下，新的膚層因子條件為開發井水力建模提供了一個可靠的替代方法。這一方法不僅適用於恆定速率抽水試驗，還適用於恆定水位抽水試驗和微水試驗，通過調整邊界條件，從而擴展了其在水文地質調查中的應用。未來的工作可以包括分析一系列含水層抽水試驗中的洩降，以估算水文參數，從而提供更準確的地下水資源評估和管理策略。

二、研究方法

2.1 地下水流模式

本研究中描述的含水層抽水過程發生在一個均勻厚度為 b 的侷限含水層中。圖 1 顯示了部分穿透井抽水引起之含水層洩降分佈 s [L] 的示意圖。變量 r [L] 表示從抽水井中心的徑向距離， z [L] 表示深度， t [T] 表示操作時間。抽水井的半徑為 r_w [L]，並以恆定抽水率 Q [L^3T^{-1}] 進行操作。井的篩網從 d 延伸到 l [L]。含水層具有各向異性的水力傳導率，分別在徑向 (r) 和垂直 (z) 方向上表示為 K_r 和 K_z [LT^{-1}]。假設從井中提取的水皆來自含水層的比儲存量 S_s [L^{-1}]。通過將達西定律與連續方程結合，可以

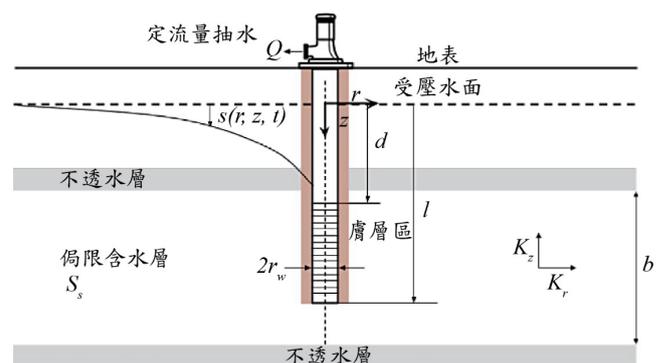


圖 1 部分穿透井在定流量抽水下引起的洩降分佈示意圖

在圓柱坐標系中表達洩降時空分布的控制方程 (Bear, 2012) :

$$K_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + K_z \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial s}{\partial t} \dots\dots\dots(1)$$

對應的初始條件和無限距離邊界條件如下 :

$$s = 0, t = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$s = 0, r \rightarrow \infty \dots\dots\dots(3)$$

在井筒內部的邊界條件則在後續章節中描述。

2.2 新膚層因子條件的推導

膚層區可以被視為具有相異於含水層之水力傳導率的無限小薄層。對於低滲透率 (正膚層) 薄層, 傳統模型假設井筒與含水層之間由於水頭損失而存在水頭不連續性 (Hawkins Jr, 1956)。然而, 對於高滲透率 (負膚層), 這一假設可能不再適用, 因為兩個高滲透率區域之間的水頭應是連續的 (Yeh *et al.*, 2008; Valois *et al.*, 2024)。為了描述負膚層的影響, 本研究基於雙區模型推導了一個新的膚層因子條件。這一新的膚層因子條件在井筒和含水層之間僅依賴於通量的不連續性。具體推導過程如下 :

- 1. 假設和條件 :** 考慮一個膚層區圍繞井筒, 厚度為 r_s 。井筒和膚層區的洩降分別表示為 s_w 與 s_{skin} 。這兩個區域之間的界面需要滿足洩降與通量的連續性。
- 2. 達西定律和連續方程 :** 膚層區內的達西通量可以表示為 (Chiu *et al.*, 2007) :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_{r,skin}) - \frac{\partial}{\partial z} q_{z,skin} = S_{s,skin} \frac{\partial s_{skin}}{\partial t} \dots\dots\dots(4)$$

其中, $S_{s,skin}$ 為膚層區的比儲存量, $q_{r,skin}$ 和 $q_{z,skin}$ 分別為膚層區在徑向和垂直方向的水通量。

- 3. 膚層區內的通量連續性 :** 由於 r_s 相對於整個含水層系統較小, 可以使用泰勒級數展開近似膚層區內的通量 :

$$q_{r,skin}(r_w + r_s) = q_{r,w}(r_w + r_s) \approx q_{r,w}(r_w) + r_s \frac{\partial q_{r,w}(r_w)}{\partial r} + O(r_s^2) \dots\dots\dots(5)$$

其中, $q_{r,w}$ 為井緣徑向方向之水通量。

- 4. 推導膚層因子條件 :** 基於達西定律, 膚層區內的水通量可以表示為 :

$$q_{r,w} = -K_w \frac{\partial s_w}{\partial r} \dots\dots\dots(6a)$$

$$q_r = -K_r \frac{\partial s}{\partial r} \dots\dots\dots(6b)$$

$$q_{r,skin} = -K_{z,skin} \frac{\partial s_{skin}}{\partial z} \dots\dots\dots(6c)$$

其中, q_r 為含水層徑向方向之水通量, K_w 為井筒的水力傳導率, $K_{z,skin}$ 為膚層區在垂直方向的水力傳導率。將這些方程代入連續方程中, 得到 :

$$K_w \frac{\partial s_w}{\partial r} = K_r \frac{\partial s}{\partial r} + r_s K_{z,skin} \frac{\partial^2 s_{skin}}{\partial z^2} - r_s S_{s,skin} \frac{\partial s_{skin}}{\partial t} \dots\dots\dots(7)$$

在典型的含水層與抽水井的設置中, $S_{s,skin}$ 和 r_s 都很小, 可以忽略最後一項 ($r_s S_{s,skin} \sim 0$)。最終得到全新的負膚層的膚層因子條件 :

$$K_r \frac{\partial s}{\partial r} = -r_s K_{z,skin} \frac{\partial^2 s_{skin}}{\partial z^2} \dots\dots\dots(8)$$

假設井筒和含水層之間的洩降是連續的 (即 $s_{skin} = s$ 在 $r = r_w$) , 可以進一步簡化為 :

$$K_r \frac{\partial s}{\partial r} = -S_f \frac{\partial^2 s_{skin}}{\partial z^2} \dots\dots\dots(9)$$

其中 $S_f = r_s K_{z,skin}$, 此為負膚層因子。這個方程確立了負膚層的膚層因子條件, 即在井筒和含水層之間需要滿足的通量連續性條件。根據此膚層條件推導出的模式稱為 NSF (negative skin-factor) 模型。而傳統的正膚層模型則簡稱為 PSF (positive skin-factor) 模型, 相關邊界條件如下

$$s_w = s - r_w \alpha \frac{\partial s}{\partial r} \dots\dots\dots(10)$$

其中 α 定義為正膚層因子。方程式 (9) 也表明, 負膚層因子中的通量損失由膚層位置的 surface Laplacian operator 所主導, 因此通量的損失為膚層垂直方向的水力傳導度引導水流至非膚層區域所導致, 此現象也符合高透水度區域的水流特徵 (Lin and Lin, 2024)。解析解使用拉氏轉換與傅立葉轉換

求解，因此其無因次的洩降分布解在拉氏與傅立葉域可以寫作

$$\tilde{s}_D = \frac{2[\sin(d_D \xi_n) - \sin(l_D \xi_n)] K_0(r_D \lambda)}{\xi_n p (d_D - l_D) [(C_D p / (l_D - d_D) + \beta \xi_n^2) K_0(\lambda) + \lambda K_1(\lambda)]} \dots \dots \dots (11)$$

其中 \tilde{s}_D 為在拉氏與傅立葉域的無因次洩降定義為 $4\pi K_r b \tilde{s} / Q$ ， $\lambda = \sqrt{\kappa \xi_n^2 + p}$ ， K_0 與 K_1 分別代表 0 階和 1 階的第二類修正貝塞爾函數。可以聯合採用 Stehfest (1970) 方法與有限傅立葉逆轉換將公式 (11) 轉換為時空間域，轉換公式可以參考一般的工程數學教課書。其餘無因次參數的定義參見下列：

1. C_D ：井儲存效應參數，定義為井的儲存量與含水層儲存量的比值，定義為 $S_w r_w / S_s b$ 。
2. κ ：徑向水力傳導率與垂直水力傳導率的比值，定義為 $r_w^2 K_z / (b^2 K_r)$ 。
3. l_D ：下井篩網的深度與含水層厚度的比值， l / b 。
4. d_D ：上井篩網的深度與含水層厚度的比值， d / b 。
5. r_D ：無因次徑向距離，定義為 r / r_w 。
6. z_D ：無因次深度，定義為 z / b 。
7. t_D ：無因次時間，定義為 $K_r t / (r_w^2 S_s)$ 。
8. β ：負膚層因子，定義為 $S_f r_w / (b^2 K_r)$ 。

2.3 敏感度分析

在敏感度分析中，考慮了四個參數： C_D 、 κ 、 l_D 和 α 或 β (根據不同模型)。設置 d_D 的值為零，因此 l_D 代表井的穿透比。本研究採用 Borgonovo and Apostolakis (2001) 提出的敏感度分析框架，稱作為 differential importance measure (DIM)，定義如下

$$DIM_k = \frac{P_k \frac{\partial s_D}{\partial P_k}}{\sum_{j=1}^N P_j \frac{\partial s_D}{\partial P_j}} \dots \dots \dots (12)$$

其中 P_k 為第 k 個參數， N 為參數總數。另外，當 DIM 越大的時候代表該參數越敏感。

三、結果與討論

3.1 敏感度分析結果

圖 2 顯示了 $(r_D, z_D) = (1, 0.5)$ 處的時間無因次

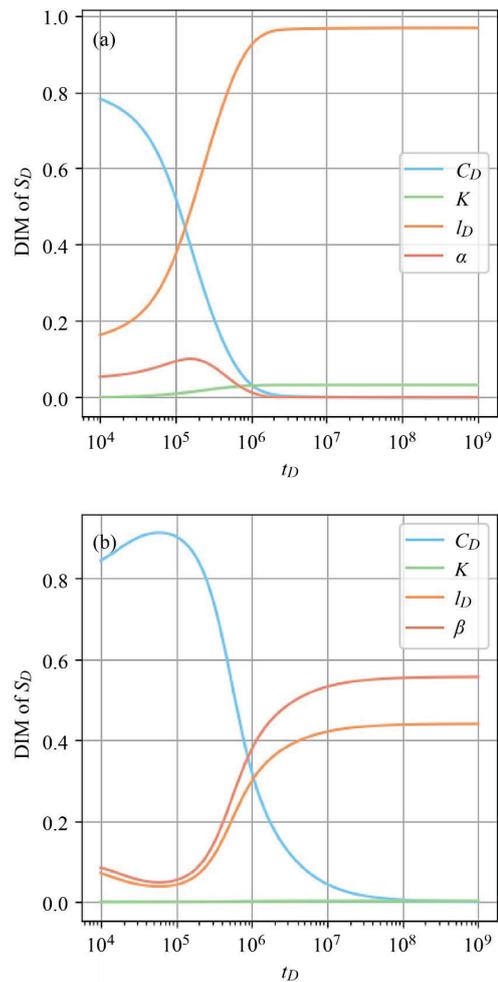


圖 2 (a) 正膚層因子模式之敏感度曲線與、(b) 本研究發展之負膚層模式之敏感度曲線

洩降分佈曲線，分別對於 (a) PSF 模型和 (b) NSF 模型進行觀察。圖 2a 顯示 C_D 和 l_D 的變化在早期和晚期時間段最為顯著。 κ 在晚期表現出一些影響，但這些影響較小。膚層因子 α 影響早期時間段，在 t_D 時達到峰值。正是井儲效應變得可忽略的時間。在這段時間之後，由於 C_D 與 α 的效應都包含在井洩降項中，DIM 曲線合併。相反地，圖 2b 顯示在早期時間 C_D 的變化效應最為顯著，而 κ 的影響可以忽略不計。在中後期時間段， l_D 和 β 的效應變得顯著，其中 β 的影響略微超過 l_D 。

結果清楚地表明，在考慮高滲透率膚層時，負膚層因子對晚期洩降的影響顯著且不可忽略。這是因為膚層中的水流在更高傳導率的作用下，導致膚層區域內的擴散流動。相比之下，現有的正膚層因子模型僅在初期階段顯示出膚層效應。隨著抽水時間的延長，這些效應可以忽略，因為地下水流動由含水層流動主導。

3.2 膚層因子之洩降行為影響

圖 3 展示使用 (a) 過去 PSF 模式隨不同正膚層因子 α 的洩降時間變化與 (b) 本研究發展之 NSF 模式隨不同負膚層因子 β 的洩降時間變化。圖中可以發現，改變正膚層因子 α 時，PSF 模式預測的洩降曲線主要在前段時間改變 (大約在 $t_D = 10^{-6}$ 之前)，正膚層因子越大則前段時間的洩降越大，這是因為 α 變大代表靠近井緣的水頭損失變大。另一方面，改變負膚層因子 β 時，洩降改變不侷限於短時間之內，而是對整個洩降時間週期都有顯著影響。這現象與 PSF 模式完全不同，因為正膚層因子的影響與井儲水效應伴隨在一起，若井儲水效應消失，則井緣與含水層之間的水頭損失也會一並消失。反之，NSF 模式的能量損失在於井緣與含水層之間的流通量不連續造成的流量損失，此效應並不會隨著井蓄水效應消失而消失，而是持續伴隨井膚層區域存在而持續影響地下水流。

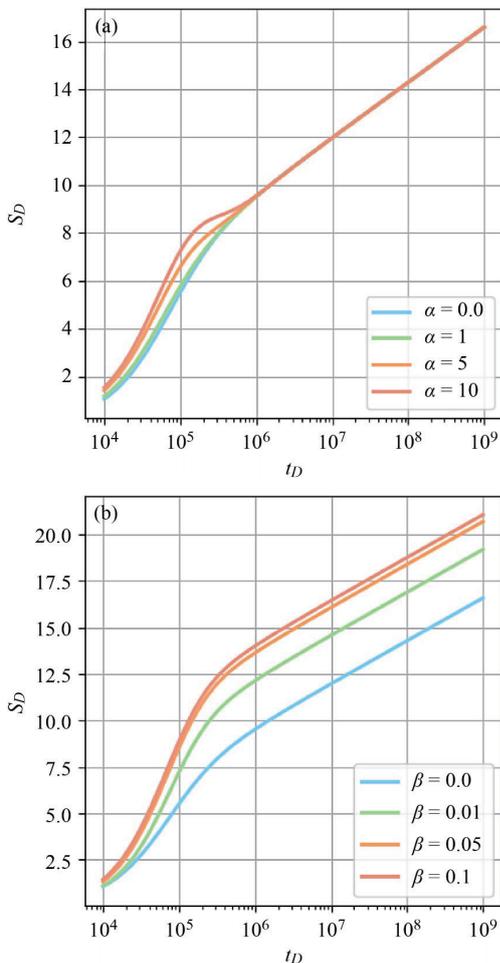


圖 3 (a) 正膚層因子模式之洩降時間曲線與、(b) 本研究發展之負膚層模式之洩降時間

使用時間導數有助於觀察不同水井力學效應在時間序列中的特徵，而時間導數洩降 $ds_D / d \log t_D$ 又可以寫為 $t_D ds_D / dt_D$ ，可以看到時間越大，時間權重越大，並且反映出洩降的瞬時變化。一些研究 (如 Bourdet *et al.*, 1983; Chow, 1952; Tiab and Kumar, 1980a) 中，許多學者透過分析時間導數洩降時間序列 (在石油領域更常見) 探討了抽水試驗中水流之瞬態行為。時間導數洩降序列分析早期就被認為是抽水測試解釋的檢測工具，因為它大大提高了地下水流洩降對於流動條件的敏感性，允許檢測各種形式的不均勻、非均質或有界儲層 (Gringarten, 2008 年)。

圖 4 展示使用 (a) 過去 PSF 模式隨不同正膚層因子 α 的時間導數洩降時間變化與 (b) 本研究發展之 NSF 模式隨不同負膚層因子 β 的時間導數洩降時間變化。圖中可以看到，PSF 模式的時間導數洩降在前期上升後會往下降，這是典型的井儲水效應的特

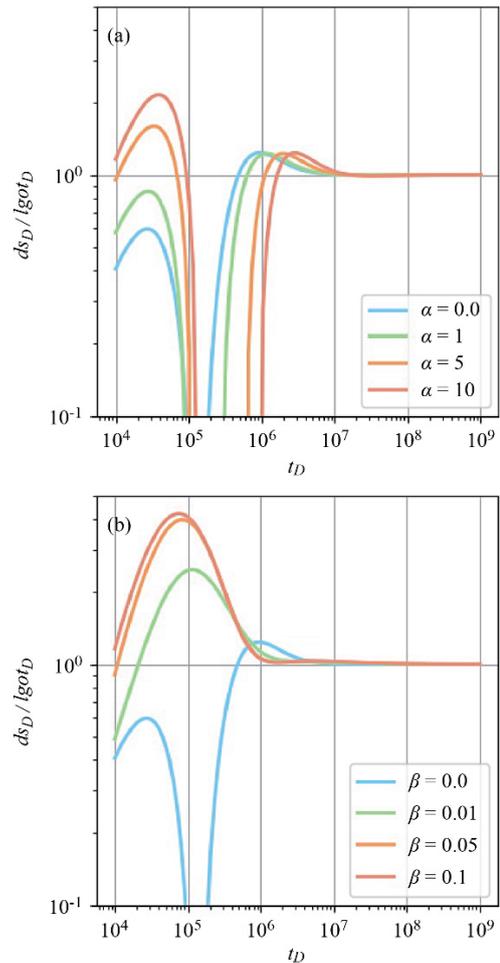


圖 4 (a) 正膚層因子模式之時間導數洩降時間曲線與、(b) 本研究發展之負膚層模式之時間導數洩降時間曲線

徵，而正膚層效應則會改變時間導數洩降的發生時間，也就是 α 越大，時間導數洩降特徵會往更後面的時間移動。相較之下，NSF 模式的井儲水效應特徵僅在負膚層因子 β 為零時才觀察得到。當改變負膚層因子 β 時，前段時間的時間導數洩降會往上移動並呈現單峰分布。隨著 β 值變大，時間導數洩降的單峰值也會上升，因此可以將此視為負膚層因子 β 的水流特徵。

進一步討論，PSF 模式中，由於井儲水效應的影響，時間導數洩降在早期顯示出顯著的上升趨勢，這通常是由於井筒內水體儲存和釋放過程所致。在這一階段，膚層因子的大小會直接影響洩降的時間點和幅度。當 α 值增加，表明膚層阻力增大，使得洩降效應在時間軸上向後推移，這意味著井筒對流體的影響時間更長。另一方面，NSF 模式強調的是負膚層因子對時間導數洩降的影響。當 β 為零時，負膚層因子的影響不明顯，洩降曲線主要反映出井儲水效應。然而，隨著 β 值的增加，井壁的負阻力效應顯現，使得前期的時間導數洩降曲線上升，並在某一點達到峰值。這個峰值的出現和高度均與 β 的大小密切相關，顯示出負膚層因子在控制流體運動中的重要角色。上述分析可以發現兩者模式的抽水引至之水流特徵截然不同，也因此欲利用 PSF 模式來描述具有 NSF 特徵的資料時，對於水井力學的過程會產生巨大的誤判。

四、結論

本研究修正了過去膚層因子模型，基於雙區模型重新推導了膚層因子條件，並將其納入到地下水流動模型中，以描述侷限含水層中由於高滲透率膚層引起的洩降分佈。研究結果顯示：新的膚層因子條件僅依賴於井筒和含水層之間通量的不連續性，更符合負膚層的物理特徵。這一條件在井筒和含水層之間保證了洩降的連續性，而允許通量不連續。敏感性分析表明，負膚層對於系統在中後期時間段的影響顯著，而現有的正膚層模型主要在早期時間段產生影響。新的膚層因子考慮了膚層區的水重新分佈的效應，這對洩降具有顯著地影響。過去的膚層因子模式與考慮高滲透率負膚層所推導的模式所預測的洩降具有截然不同的特徵，因此利用正膚層模式來解釋負膚層的現地資料將產生誤判。新模型在多個含水層抽水試驗中展示了其高準確性和適用性，特別是在描述高滲透率膚層的影響方面。這

一方法不僅適用於定流量抽水試驗，還適用於定水頭抽水試驗與微水試驗，通過調整邊界條件擴展了其在水文地質調查中的應用。本研究提出的方法和結果為地下水管理和井水力建模提供了新的見解，尤其是在考慮高滲透率膚層效應時。這些結果可以幫助更準確地評估水資源，制定有效的地下水管理策略。未來的研究可以進一步分析不同類型含水層和膚層特性的影響，並應用於更廣泛的水文地質條件，以提高模型的通用性和實用性。

致謝

本研究承蒙蘇作樑基金的支持而得以完成，謹致謝忱。

參考文獻

1. Agarwal, R.G., R. Al-Hussainy, and H. Ramey Jr, "An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. analytical treatment," *Society of Petroleum Engineers Journal*, 10, 279-290, 1970
2. Barker, J., and R. Herbert, "Pumping Tests in Patchy Aquifers," *Groundwater*, 20, 150-155, 1982.
3. Borgonovo, E., G.E. Apostolakis, S. Tarantola, and A. Saltelli, "Comparison of Global Sensitivity Analysis Techniques and Importance Measures in PSA," *Reliability Engineering & System Safety*, 79, 175-185, 2003.
4. Bourdet, D., T. M. Whittle, A. A. Douglas, and Y. M. Pirard, "A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis," *World Oil*, 196(6), 95-106, 1983.
5. Chow, V. T., "On the Determination of Transmissibility and Storage Coefficients from Pumping Test Data," *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 33(3), 397-404, 1952.
6. Ehlig-Economides, C., "Use of the Pressure Derivative for Diagnosing Pressure-Transient Behavior," *Journal of Petroleum Technology*, 40(10), 1280-1282, 1988.
7. Ferroud, A., R. Chesnaux, and S. Rafini, "Insights on Pumping Well Interpretation from Flow Dimension Analysis: The Learnings of a Multi-Context Field Database," *Journal of Hydrology*, 556, 449-474, 2018.
8. Gringarten, A. C., "From Straight Lines to

- Deconvolution: The Evolution of the State of the Art in Well Test Analysis,” *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(01), 41-62, 2008.
9. Hantush, M.S., *et al.*, “Hydraulics of Wells,” *Advances in Hydroscience*, 1, 281-432, 1964.
 10. Hawkins Jr, M.F., “A Note on the Skin Effect,” *Journal of Petroleum Technology*, 8, 65-66, 1956.
 11. Hurst, W., “Establishment of the Skin Effect and Its Impediment to Fluid Flow into a Well Bore,” *Petroleum Engineer*, 25, B6-B16, 1953.
 12. Lin, Y.C., S.Y. Yang, C.S. Fen, and H.D. Yeh, “A General Analytical Model for Pumping Tests in Radial Finite Two-Zone Confined Aquifers with Robin-Type Outer Boundary,” *Journal of Hydrology*, 540, 1162-1175, 2016.
 13. Mahdavi, A., B. L. Kurylyk, and Y. F. Lin, “Advanced Analytical Model for Interpreting Oscillatory Pumping Tests with Wellbore Skin and Rate-Dependent Skin Effects,” *Water Resources Research*, 60(2), e2023WR035291, 2024.
 14. Moench, A., and P. Hsieh, “Analysis of Slug Test Data in a Well with Finite Thickness Skin,” *Memoirs of the 17th International Congress on the Hydrogeology of Rocks of Low Permeability, USA Members of the International Association of Hydrologists, Tucson, AZ*, 1729, 1985a.
 15. Novakowski, K.S., “A Composite Analytical Model for Analysis of Pumping Tests Affected by Well Bore Storage and Finite Thickness Skin,” *Water Resources Research*, 25, 1937-1946, 1989.
 16. Papadopoulos, I.S., and H.H. Cooper Jr, “Drawdown in a Well of Large Diameter,” *Water Resources Research*, 3, 241-244, 1967.
 17. Rafini, S., R. Chesnaux, and A. Ferroud, “A Numerical Investigation of Pumping-Test Responses from Contiguous Aquifers,” *Hydrogeology Journal*, 25(3), 877, 2017.
 18. Sandal, H.M., R.N. Horne, H.J. Ramey Jr, and J.W. Williamson, “Interference Testing with Wellbore Storage and Skin Effect at the Produced Well,” *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, SPE-7454, 1978.
 19. Stehfest, H., “Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5],” *Communications of the ACM*, 13(1), 47-49, 1970.
 20. Theis, C.V., “The Relation Between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground-Water Storage,” *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 16, 519-524, 1935.
 21. Tiab, D., and A. Kumar, *Application of the p'D Function to Interference Analysis*, American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, New York, 1976.
 22. Tsai, C.S. and H.D. Yeh, “Wellbore Flow-Rate Solution for a Constant-Head Test in Two-Zone Finite Confined Aquifers,” *Hydrological Processes*, 26, 3216-3224, 2012.
 23. Valois, R., A. Rivière, J.M. Vouillamoz, and G.C. Rau, “Analytical Solution for Well Water Response to Earth Tides in Leaky Aquifers with Storage and Compressibility in the Aquitard,” *Hydrology and Earth System Sciences*, 28, 1041-1054, 2024.
 24. Yang, S.Y. and H.D. Yeh, “Laplace-Domain Solutions for Radial Two-Zone Flow Equations Under the Conditions of Constant-Head and Partially Penetrating Well,” *Journal of Hydraulic Engineering*, 131, 209-216, 2005.
 25. Yang, S.Y. and H.D. Yeh, “On the Solutions of Modeling a Slug Test Performed in a Two-Zone Confined Aquifer,” *Hydrogeology Journal*, 15, 297-305, 2007.
 26. Yang, Y.J., and T.M. Gates, “Wellbore Skin Effect in Slug-Test Data Analysis for Low-Permeability Geologic Materials,” *Groundwater*, 35, 931-937, 1997.
 27. Yeh, H.D., and Y.C. Chang, “Recent Advances in Modeling of Well Hydraulics,” *Advances in Water Resources*, 51, 27-51, 2013.
 28. Yeh, H.D., Y.J. Chen, and S.Y. Yang, “Semi-Analytical Solution for a Slug Test in Partially Penetrating Wells Including the Effect of Finite-Thickness Skin,” *Hydrological Processes*, 22, 3741-3748, 2008.

收稿日期：民國 113 年 07 月 17 日
修改日期：民國 113 年 08 月 21 日
接受日期：民國 113 年 09 月 24 日